

Решение типового варианта ДКР по математическому анализу.
1 курс 1 семестр.

1. Вычислить пределы с помощью правила Лопиталя:

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\frac{1}{x}}{\ln x + \frac{x-1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x \ln x + x-1} =$$

$$\stackrel{\left\{ \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \right\}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\ln x + \frac{x}{x-1} + 1} = \frac{1}{2}.$$

$$б) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} (tgx)^{2x-\pi}$$

Это есть неопределённость вида ∞^0 . Обозначив выражение под знаком предела через y , рассмотрим

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \ln y = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} (2x-\pi) \ln tgx = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \frac{\ln tgx}{(2x-\pi)^{-1}} \stackrel{\left\{ \begin{smallmatrix} \infty \\ \infty \end{smallmatrix} \right\}}{=} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \frac{-(2x-\pi)^2}{2tgx \cdot \cos^2 x} =$$

$$= - \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \frac{(2x-\pi)^2}{2 \sin x \cos x} = - \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \frac{(2x-\pi)^2}{\sin 2x} \stackrel{\left\{ \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \right\}}{=} - \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \frac{2(2x-\pi)}{2 \cos 2x} = - \frac{0}{-1} = 0.$$

$$\text{Значит, } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} y = 1.$$

2. Провести исследование и настроить график функции: $y = x - 2 \arctg x$

Область определения: $x \in \mathbb{R}$; функция является нечетной; она непрерывна для всех x , поэтому её график вертикальных асимптот не имеет; наклонные и горизонтальные асимптоты:

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x - 2 \arctg x}{x} = 1 - 2 \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\arctg x}{x} = 1,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x - 2 \arctg x - x) = -2 \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \arctg x = -2 \left(\pm \frac{\pi}{2} \right) = \mp \pi,$$

т.е. при $x \rightarrow +\infty$ асимптотой является прямая $y = x - \pi$, а при $x \rightarrow -\infty$ асимптотой является прямая $y = x + \pi$.

$$\text{Далее имеем: } y' = 1 - \frac{2}{1+x^2} = \frac{x^2-1}{1+x^2} = \frac{(x-1)(x+1)}{1+x^2}; \text{ знаки } y': \quad + \quad - \quad +$$

т.е. функция возрастает на интервалах $(-\infty, -1)$ и $(1, +\infty)$ и убывает на интервале $(-1, 1)$; $x = -1$ является точкой максимума, а $x = 1$ является точкой мини-

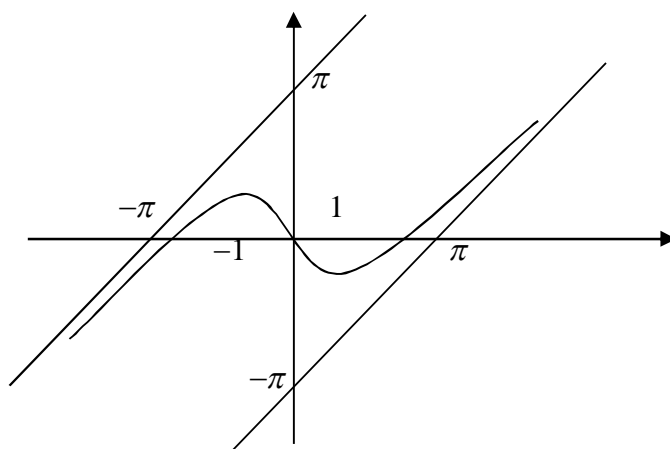
мума:

$$y(-1) = -1 - 2\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1 + \frac{\pi}{2} \approx 0,57, \quad y(1) = 1 - 2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 - \frac{\pi}{2} \approx -0,57,$$

$$y'' = \frac{2x(1+x^2) - (x^2-1) \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{4x}{(1+x^2)^2};$$

знаки y'' : $\frac{-}{0}+$ т.е. график функции будет выпуклым на

интервале $(-\infty, 0)$, и вогнутым на интервале $(0; \infty)$; точка $(0; 0)$ будет точкой перегиба графика; $y'(0) = -1$. График функции будет иметь вид:



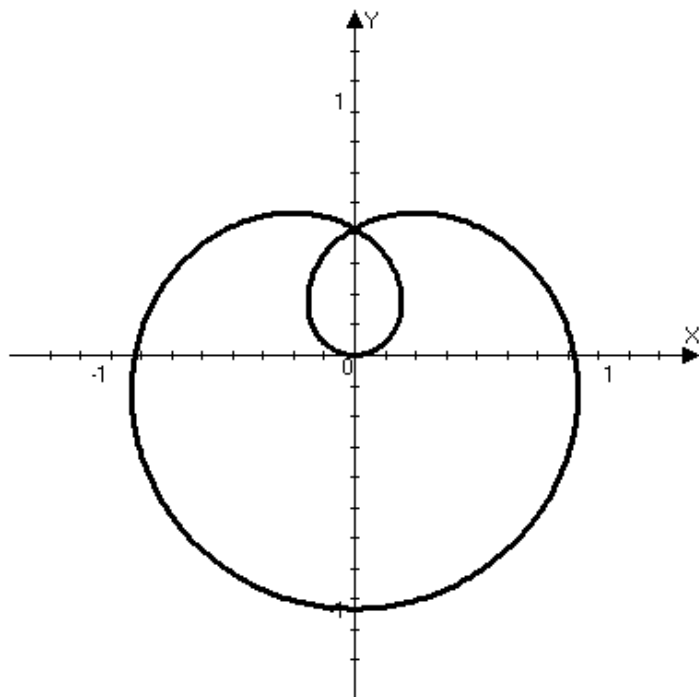
3. Построить график функции в полярной системе координат: $r = \sin \frac{\varphi}{3}$

График строится “по точкам” с учетом того, что r возрастает при

$0 \leq \frac{\varphi}{3} \leq \frac{\pi}{2}$, то есть при $0 \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2}$, и убывает при $\frac{\pi}{2} \leq \frac{\varphi}{3} \leq \pi$, то есть при

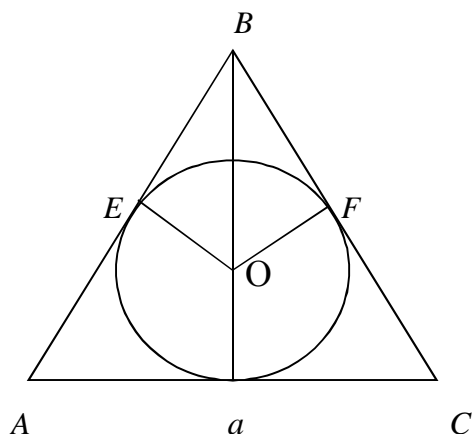
$\frac{3\pi}{2} \leq \varphi \leq 3\pi$; $r(0) = 0$, $r\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, $r(\pi) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $r\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \sin \frac{\pi}{2} = 1$,

$r(3\pi) = \sin \pi = 0$ и так далее. В итоге, график будет иметь вид:



4. Найти радиус основания и высоту конуса наименьшего объема, описанного около сферы единичного радиуса. $V = \frac{1}{3} Aa^2 \cdot Ba = \frac{1}{3} R^2 H$.

Из подобия треугольников $AaB \sim EOB$



$$\frac{EO}{Aa} = \frac{EB}{Ba}; \text{ т.к. } AE = Aa = R, \text{ то отсюда}$$

$$\frac{1}{R} = \frac{\sqrt{BO^2 - EO^2}}{H} = \frac{\sqrt{(H-1)^2 - 1}}{H}.$$

$$\text{Теперь } R = \frac{H}{\sqrt{H^2 - 2H}}$$

$$\text{и } V = \frac{1}{3} \cdot \frac{H^3}{H^2 - 2H} = \frac{1}{3} \cdot \frac{H^2}{H - 2}, \text{ где } H \in (2, +\infty).$$

Найдем, при каком H эта функция будет наименьшей:

$$V' = \frac{1}{3} \frac{2H(H-2) - H^2}{(H-2)^2} = \frac{H(H-4)}{(H-2)^2} = 0. \text{ т.к. } H \neq 0, \text{ то отсюда } H = 4.$$

Знаки V' : $\frac{-}{2} \quad \frac{+}{4}$

Значит, V убывает на $(-2, 4)$ и возрастает на $(4, +\infty)$ и функция будет

наименьшей при $H = 4$. Тогда $R = \frac{4}{\sqrt{16-8}} = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}$. Таким образом, $H = 4, R = \sqrt{2}$.

5. Вычислить $y^{(7)}$ функции $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x}$. Разделим числитель на знаменатель и разложим оставшуюся правильную дробь на простые:

$$y = \frac{x^2 2x - 2x - 1}{x^2 + 2x} = 1 - \frac{2x + 1}{x(x + 2)}; \quad \frac{2x + 1}{x(x + 2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x + 2}; \quad 2x + 1 = A(x + 2) + Bx;$$

при $x = 0$ отсюда $2A = 1$, $A = \frac{1}{2}$; при $x = -2$ отсюда $-2B = -3$, $B = \frac{3}{2}$.

Таким образом, $y = 1 - \frac{1}{2x} - \frac{3}{2(x + 2)}$. Теперь легко найти искомую производную:

$$y^{(7)} = -\frac{(-1)(-2)\dots(-7)}{2x^8} - \frac{3(-1)(-2)\dots(-7)}{2(x + 2)^8} = \frac{7!}{2} \left(\frac{1}{x^8} + \frac{1}{(x + 2)^8} \right)$$

Теперь вычислим $y^{(7)}$ функции $y = (x^2 - 1)e^{-x}$.

Используя формулу Лейбница при $u = e^{-x}$, $v = x^2 - 1$, имеем:

$$y^{(7)} = u^{(7)}v + 7u^{(6)}v' + \frac{7 \cdot 6}{2!}v'' \quad (\text{все остальные члены будут равны } 0);$$

$$y^{(7)} = -e^{-x}(x^2 - 1) + 7e^{-x} \cdot 2x - 21e^{-x} \cdot 2 = e^{-x}(-x^2 + 1 + 14x - 42) = -e^{-x}(x^2 - 14x + 41)$$

6. Используя формулу Тейлора 2-ого порядка, вычислить приближенно $\sqrt{5}$ и доказать, что при этом погрешность r допускает оценку $|r| \leq \frac{1}{2^{10}}$

$$\sqrt{5} = \sqrt{4 - 1} = 2\sqrt{1 - \frac{1}{4}}$$

Далее используем формулу $f(x) = (1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2!}x^2 + r$,

в которой $\alpha = \frac{1}{2}$, $x = -\frac{1}{4}$

$$\begin{aligned} \text{è } r &= f'''(c) \frac{x^3}{3!} = \frac{\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2)}{3!}(1 + c)^{\alpha - 3} x^3 = \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{3!}(1 + c)^{-\frac{5}{2}} \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \\ &= \frac{3}{3 \cdot 2^4 \cdot 2^6} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1 + c)^5}} = \frac{1}{2^{10} \sqrt{(1 + c)^5}}, \end{aligned}$$

С между 0 и $\frac{1}{4}$. Отбрасывая остаточный член r , имеем приближенно

$$\sqrt{5} \approx 2 \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \right)}{2!} \cdot \frac{1}{4^2} \right) = 2 \left(1 + \frac{1}{8} - \frac{1}{128} \right) = 2 + \frac{15}{64} = 2,234375$$

Погрешность этих вычислений допускает оценку $|r| = \frac{1}{2^{10} \sqrt{(1+c)^5}} \leq \frac{1}{2^{10}}$, т.к.

наибольшее значение этой дроби будет при наименьшем её знаменателе, т.е. при $c = 0$.

7. Составить уравнения касательной и нормали к кривой $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$

в точке $t_0 = \frac{\pi}{2}$ и вычислить $y''_{xx}(x_0)$.

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{a \sin t}{a(1 - \cos t)} = \frac{2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}}{2 \sin^2 \frac{t}{2}} = \operatorname{ctg} \frac{t}{2};$$

$$y'_x(t_0) = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} = 1; y(t_0) = a(1 - 0)a; \quad x(t_0) = x_0 = a \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right).$$

Уравнение касательной имеет вид $y - a = 1 \left(x - a \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) \right); \quad y = x - a \left(\frac{\pi}{2} - 2 \right).$

Уравнение нормали имеет вид $y - a = -\frac{1}{1} \left(x - a \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) \right); \quad y = -x + \frac{\pi a}{2};$

$$\text{Далее имеет: } y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{-\frac{1}{2 \sin^2 \frac{t}{2}}}{a \cdot 2 \sin^2 \frac{t}{2}} = -\frac{1}{4a \sin^4 \frac{t}{2}};$$

$$y''_{xx}(x_0) = -\frac{1}{4a \sin^4 \frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{4a \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^4} = -\frac{16}{4a \cdot 4} = -\frac{1}{a}.$$

8. Вычислить производную 2-го порядка от неявной функции: $y = 1 + xe^{-y}$, т.е. $y - 1 - xe^{-y} = 0$; дифференцируем это равенство по x : $y'_x - e^{-y} + xe^{-y} y'_x = 0$,

откуда $y'_x(1 + xe^{-y}) = e^{-y}$ è $y'_x = \frac{e^{-y}}{1 + xe^{-y}} = \frac{e^{-y}}{y}$.

Дифференцируем это равенство по x еще раз:

$$y''_{xx} = \frac{-e^{-y} y' y - e^{-y} y'}{y} = -\frac{e^{-y}(y+1)}{y} y' = -\frac{e^{-y}(y+1)}{y} \cdot \frac{e^{-y}}{y} = -\frac{e^{-2y}(y+1)}{y^2}.$$

9. Вычислить предел с помощью формулы Тейлора: $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x - e^{-2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2}}{\sin^4\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}$

Это есть неопределённость вида $\left\{ \frac{0}{0} \right\}$.

Обозначим $x - \frac{\pi}{4} = t$, $x = t + \frac{\pi}{4}$; тогда наш предел будет равен

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin\left(2t + \frac{\pi}{2}\right) - e^{-2t^2}}{\sin^4 t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos 2t - e^{-2t^2}}{t^4} \cdot \frac{t^4}{\sin^4 t}, \text{ что в силу 1-ого}$$

замечательного

предела $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, приводит к $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos 2t - e^{-2t^2}}{t^4}$. Далее используем готовые

разложения $\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + 0(t^4)$ и $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + 0(t^2)$; подставляя в

них вместо t $2t$ è $-2t^2$ соответственно, получим

$$\cos 2t = 1 - \frac{4t^2}{2} + \frac{16t^4}{4 \cdot 3 \cdot 2} + 0(t^4) = 1 - 2t^2 + \frac{2}{3}t^4 + 0(t^4);$$

$$e^{-2t^2} = 1 - 2t^2 + \frac{4t^4}{2} + 0(t^4) = 1 - 2t^2 + 2t^4 + 0(t^4).$$

Теперь исходный предел будет равен

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - 2t^2 + \frac{2}{3}t^4 - 1 + 2t^2 - 2t^4 + 0(t^4)}{t^4} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{2}{3} - 2\right)t^4 + 0(t^4)}{t^4} = -\frac{4}{3} + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0(t^4)}{t^4};$$

поскольку последний предел, согласно определению бесконечно малой

более высокого порядка, равен 0, то получаем ответ: $-\frac{4}{3}$.

10. Написать формулу Лагранжа для функции $y = \ln 2x$, $x \in \left[\frac{e}{2}, \frac{e^2}{2}\right]$ и найти соответствующую точку C .

Формула Лагранжа имеет вид $f \frac{(b)-f(a)}{b-a} = f'(c), c \in (a,b)$; для нашей функции будем иметь $\frac{\ln e^2 - \ln e}{e^2 - e} = \frac{2}{2x} \Big|_{x=c}, \text{ т.е. } \frac{2-1}{e^2 - e} = \frac{1}{c} \text{ и } c = e^2 - e.$

11. По графику функции построить график её первой производной. Под графиком функции будем строить график её производной, учитывая что:
 - на интервалах возрастания функции $(-\infty, -1)$ и $(1, +\infty)$ её производная положительна, а на интервале убывания $(-1, 1)$ это производная отрицательна;
 - точки -1 и 1 являются точками экстремума функции, значит производная функции в этих точках равна 0 или не существует: $y'(1) = 0, y'(-1)$ не существуют, т.к. в этой график функции имеет вертикальную касательную, а в силу того, что производная – это угловой коэффициент касательной, $y'(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} k_{\text{кас}} = \infty$;
 - аналогично, т.к. график функции имеет вертикальную касательную и в точке 2 , то в этой точке производная также имеет бесконечный разрыв;
 - т.к. при $x \rightarrow \pm\infty$ график функции имеет асимптоту (предположительно $y = x$), то график её производной будет иметь горизонтальную асимптоту $y = (x)', \text{ т.е. } y = 1.$

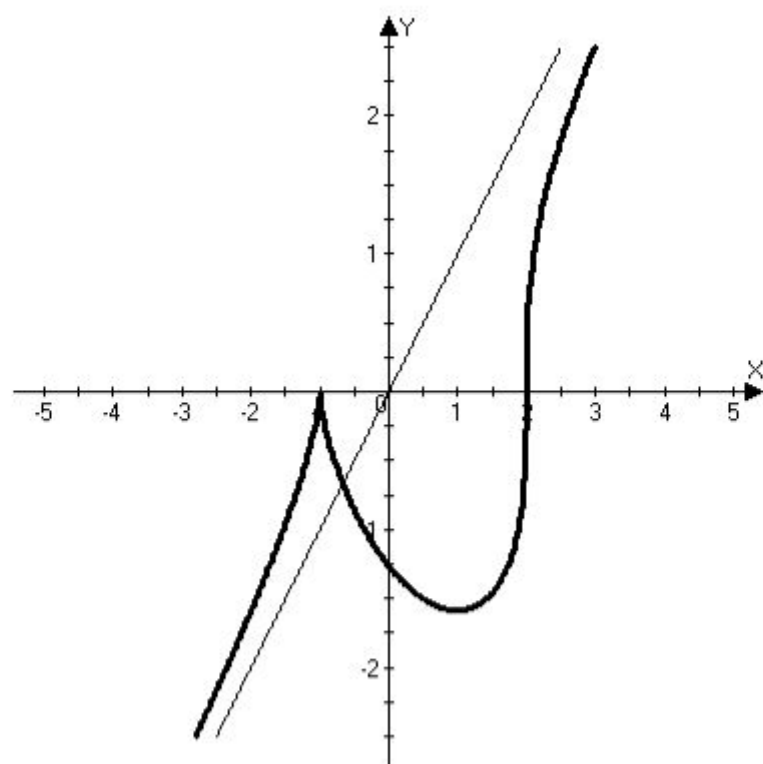


Рис. 1.

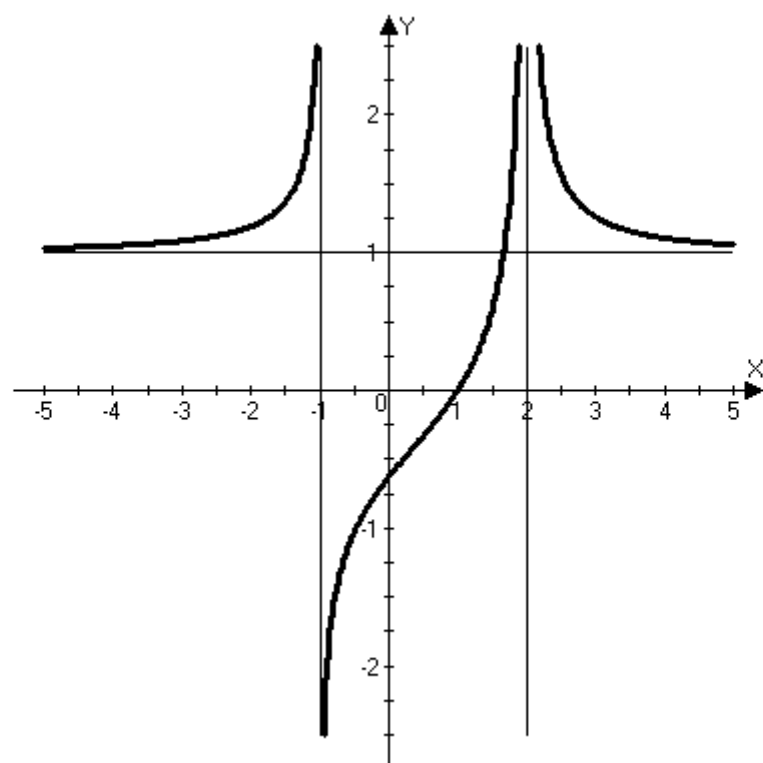


Рис. 2.